FOURIER SERIES سری فوریه

مقدمه

- سیگنال متناوب

$$x(t)=x(t+nT)$$

- پریود مشترک

سری فوریه فرم کارتزین

- $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\, Cos(n\omega_0 t) + b_n\, Sin(n\omega_0 t))$
- k مین هارمونیک
- $a_k\, Cos(k\omega_0 t) + b_k\, Sin(k\omega_0 t)$
- *هارمونیک اصلی*
- $a_1\, Cos(\omega_0 t) + b_1\, Sin(\omega_0 t))$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)Cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)Sin(n\omega_0 t)dt$$

مثال

- دوره تناوب و فرکانس زاویه ای هارمونیک اصلی را به دست آورید.

$$x(t) = 3\ Cos\ (20t) + 5\ Cos\ (22t)$$

سری فوریه فرم نمایی

- یکی از پر کاربرد ترین فرم ها

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

سری فوریه فرم قطبی

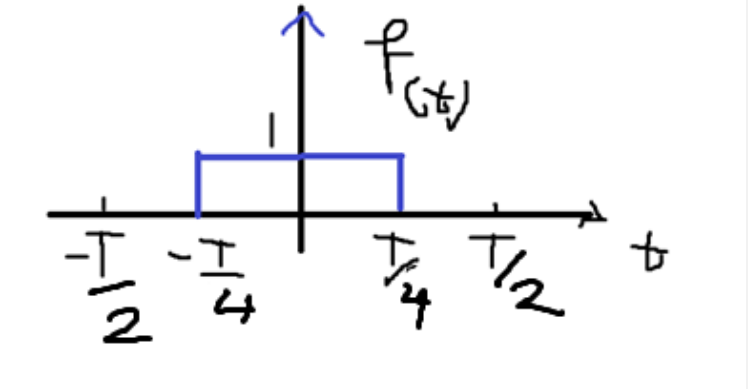
- $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n Cos(n\omega_0 t + \theta_n)$
- $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- $\theta_n = -tan^{-1}(\frac{b_n}{a_n})$

ارتباط بین ضرایب

- $c_0=a_0$
- $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$
- $c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$
- $a_n = c_n + c_{-n}$
- $b_n = j(c_n - c_{-n})$

- نکته: اگر سیگنال زوج باشد آنگاه $b_n=0$ و سری شامل جمله های کسینوسی خواهد بود و برعکس.
- مثال: ضرایب سری فوریه نمایی سیگنال $x(t) = Sin\ (\omega_0 t)$ را به دست آورید.

- مثال: ضرایب سری فوریه نمایی سیگنال $x(t) = 1 + Sin\,(\omega_0 t) + Cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$ را به دست آورید.



- ضرایب سری فوریه را حساب کنید (نمایی یا کارتزین)

- سری فوریه نمایی قطار ضربه را به دست آورید.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

فرمول پارسوال

- $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t}$
- $h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$
- $\frac{1}{T}\int_T x(t)h^*(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n c_n^*$

قضیه توان و انرژی

- $\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

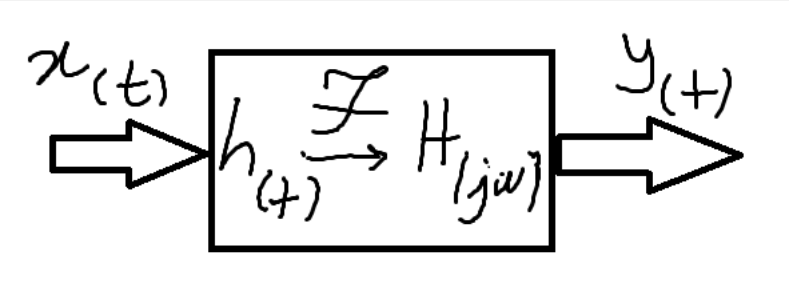
- برای سیگنال حقیقی با ضرایب سری فوریه کارتزین

- $\frac{1}{T}\int_T x(t)^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$

- مثال:در سیگنال $g(t) = 1 + \cos(2\pi t)$
- *الف)* ضرایب سری فوریه $x(t) = g(t)Cos(10\pi t + \frac{\pi}{4})$
- ب)توان متوسط $\mathrm{g(t)}$

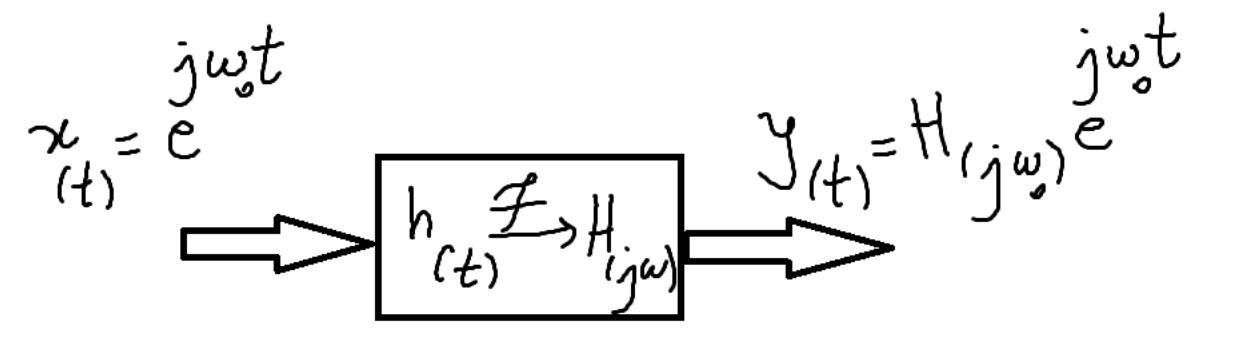
تبدیل فوریه

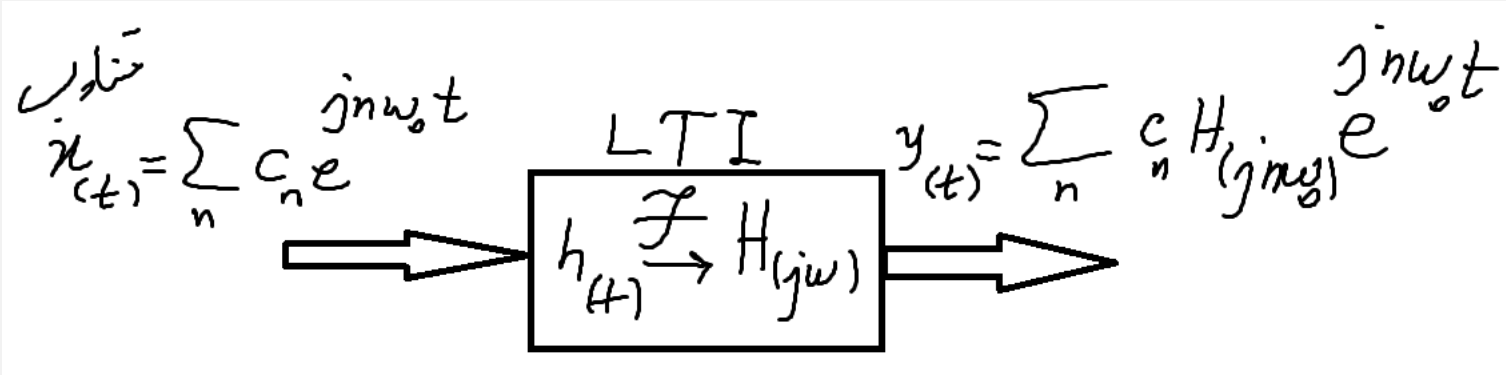
- $H(j\omega) = F\{h(t)\}$
  - پاسخ ضربه سیستم LTI : h(t)
  - تابع تبدیل سیستم: H(jw)
- $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$



- مثال: سیستمی خطی تغییر ناپذیر با زمان (LTI) داریم. پاسخ ضربه این سیستم را h(t) در نظر بگیرید. خروجی سیستم را به ازای ورودی زیر محاسبه کنید.
- $x(t) = e^{j\omega t}$

محاسبه ضرایب سری فوریه خروجی سیستم LTI برحسب ضرایب سری فوریه ورودی





- مثال: سیگنال **x(t)** از سیستمی با پاسخ ضربه زیر عبور می کند. ضرایب سری فوریه سیگنال خروجی را به دست آورید.

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}Cos(2\pi t) + Cos(4\pi t)$$

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$